

Examen colegiado de cálculo diferencial

El caso de una universidad pública de México

MAXIMILIANO DE LAS FUENTES-LARA* | WENDOLYN ELIZABETH AGUILAR-SALINAS** | ARACELI CELINA JUSTO-LÓPEZ***

Esta investigación analiza el examen colegiado de cálculo diferencial en los ciclos escolares 2018-2 y 2019-1 a un total de 3,751 estudiantes de primer semestre de las carreras de ingeniería de una universidad pública mexicana. Se estudia la actividad cognitiva requerida para la resolución de cada reactivo y los registros de representación presentes, además del carácter estructural o procesal del reactivo. Con los resultados se observa que el examen colegiado es una prueba confiable y con poder de discriminación satisfactorio, con carga mayoritaria de reactivos procedimentales y con representación algebraica que identifican también el esquema de enseñanza. Se determinan los reactivos con mayor dificultad para los estudiantes, los cuales tienen presente la actividad cognitiva de conversión, son procedimentales, con lenguaje natural presente y abundante lenguaje algebraico.

This research analyzes the differential calculus collegiate exam in the 2018-2 and 2019-1 school cycles in a total of 3,751 first-semester students from several engineering careers at a Mexican public university. We consider the cognitive activity required for the resolution of each item and the representation registers, as well as the structural or procedural nature of the item in question. The results reveal that the collegiate exam is a reliable test with a satisfactory discerning power, with a majority of procedural items and with algebraic representations that help identify the teaching scheme. We also determined which items represent the greatest difficulty for the students, which ones take into account cognitive conversion activity, which are procedural, and which ones feature natural language and/or abundant algebraic language.

Palabras clave

Aprendizaje de las matemáticas
Cálculo
Dificultades de aprendizaje
Enseñanza de las matemáticas
Exámenes

Keywords

Mathematics learning
Calculus
Learning difficulties
Teaching mathematics
Exams

Recepción: 11 de febrero de 2020 | Aceptación: 2 de julio de 2020

DOI: <https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2021.172.59758>

- * Profesor investigador titular de la Facultad de Ingeniería Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) (México). Doctor en Matemática Educativa. Línea de investigación: problemática de la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas para ingeniería. Publicación reciente: (2020, en coautoría con W. Aguilar-Salinas, A. Justo-López y A.D. Martínez), "Instrumento de medición para diagnosticar las habilidades algebraicas de los estudiantes en el curso de cálculo diferencial en ingeniería", *Revista Española de Pedagogía*, año 78, núm. 275, pp. 611-631. CE: maximilianofuentes@uabc.edu.mx
- ** Profesora investigadora titular de la Facultad de Ingeniería Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) (México). Doctora en Ciencias. Línea de investigación: aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Publicación reciente: (2017, en coautoría con G. Chávez-Valenzuela y M. De las Fuentes-Lara), "Tutorías: estudio exploratorio sobre la opinión de los estudiantes de tronco común, ciencias de la ingeniería", *Formación Universitaria*, vol. 10, núm. 3, pp. 69-80. CE: aguilar.wendolyn@uabc.edu.mx
- *** Profesora investigadora titular de la Facultad de Ingeniería Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) (México). Doctora en Ciencias. Línea de investigación: tecnologías educativas. CE: araceli.justo@uabc.edu.mx

INTRODUCCIÓN

La matemática es de gran importancia en la formación de un ingeniero, ya que constituye el lenguaje de modelación, el soporte simbólico con el cual expresan las leyes que rigen el objeto de su trabajo; está vinculada a las actividades de modelar, interpretar y comunicar en lenguaje preciso (Brito *et al.*, 2011). La matemática es la herramienta más poderosa del ingeniero y su dominio le permitirá el progreso a lo largo de su formación profesional; adicionalmente, ayuda al desarrollo del razonamiento abstracto, el cual es fundamental en la formación del ingeniero (Ruiz *et al.*, 2016).

Dentro de esta gran área, el objetivo del cálculo es proporcionar conocimientos en los estudiantes que les permitan interpretar, plantear y resolver problemas de ingeniería (Zúñiga, 2007), ya que la formación de ingenieros demanda aprendizajes matemáticos que contribuyan a resolver problemas específicos de corte tecnológico, pero sobre todo práctico (Ruiz *et al.*, 2016). El propósito general de un curso de cálculo diferencial en una carrera de ingeniería es que los estudiantes apliquen los conceptos y procedimientos del cálculo en la diferenciación de funciones, mediante el uso de límites y teoremas de derivación, para resolver problemas cotidianos de ciencia e ingeniería. Particularmente en las ingenierías, la asignatura de cálculo diferencial es precedente de cursos como cálculo integral, ecuaciones diferenciales, cálculo multivariable, transferencia de calor y masa, estática, dinámica, electricidad y magnetismo, circuitos eléctricos, entre otras.

Hay gran cantidad de estudios dedicados a conocer la importancia del cálculo diferencial desde un punto de vista teórico (Cantoral y Farfán, 2004; Trigueros, 2005; Mateus, 2011; Jiménez *et al.*, 2018; Artigue, 2018), y del desarrollo del pensamiento matemático (Cantoral *et al.*, 2005; Acosta *et al.*, 2009; Pérez y Ocaña, 2013; Vergel *et al.*, 2015); también los hay sobre modalidades de aprendizaje (Sanabria, 2019)

en un área en particular (Medina *et al.*, 2017), en la formación de docentes (Fonseca y Alfaro, 2018), en el proceso de enseñanza y/o aprendizaje (García *et al.*, 2006; Iglesias, 2019), en los materiales y herramientas de apoyo (Villalobos *et al.*, 2018; Gutiérrez, 2019; Rosales-Mata y Chavira, 2019), en forma de propuestas para mejorar la calidad de la enseñanza (Duarte y Castro, 2015; Martínez-Reyes, 2019) y sobre la evaluación del mismo conocimiento en profesores (Moreno y Cuevas, 2004), sin embargo, son pocos los que muestran y validan confiablemente los temas donde el estudiante encuentra una mayor dificultad para así abordarlos de una forma pertinente y significativa.

En las últimas décadas ha crecido el interés respecto del estudio de la problemática de reprobación, rezago y abandono de los estudiantes de primer año de licenciatura en ingeniería (Muñoz y Arce, 2001; Montalto *et al.*, 2002; Zavaleta y Flores, 2009; Correa *et al.*, 2009; Arraiz y Valecillos, 2010), así como por la evaluación del aprendizaje a gran escala, ya que permiten un mejor conocimiento y caracterización del logro educativo de los estudiantes.

Las evaluaciones permiten detectar las habilidades generadas en los estudiantes a partir de la enseñanza, lo cual posibilita la creación de estrategias y programas de atención para remediar el bajo aprovechamiento de los estudiantes. Este factor es una preocupación generalizada en las universidades (Posso, 2005).

Con el propósito de contribuir a estos aspectos, se realizó una investigación en una universidad pública de México con los siguientes objetivos: 1) presentar el examen colegiado de cálculo diferencial (ECCD) de opción múltiple, criterial, alineado con el currículo y de alto impacto (Popham, 1990; Nitko, 1994; Contreras, 1998; 2000) que evalúa los conocimientos que los estudiantes universitarios adquieren en un curso de cálculo diferencial; 2) demostrar que el ECCD es un instrumento de evaluación válido, confiable y con poder de discriminación aceptable (Carmines y Zeller, 1987; Backhoff *et al.*, 2000;

Contreras y Backhoff, 2004; Ding *et al.*, 2006; Engelhardt, 2009); 3) realizar un análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes en el ECCD en cuanto a conceptos, procedimientos (Sfard, 1991; Contreras y Backhoff, 2004; Häikiöniemi, 2006; Harel *et al.*, 2006) y desde la perspectiva de las diferentes actividades cognitivas y registros de representación (Duval, 1993; 2000; 2006a; 2006b; 2006c); y 4) formular recomendaciones a partir de los resultados expuestos en cuanto a la posibilidad de mejora del ECCD y al diseño instruccional.

LINEAMIENTOS TEÓRICOS

Dado que los jóvenes que asisten a las escuelas están destinados a adquirir principalmente conocimientos teóricos y prácticos, resulta conveniente analizar si los contenidos sobre cuyo dominio son evaluados se refieren a conceptos o a procedimientos. Para Sfard (1991) la visión estructural o conceptual se caracteriza por un ente que posee rasgos propios, es estática, instantánea e integradora. Para Contreras y Backhoff (2004) se refiere a las características, atributos ontológicos y definición del propio concepto; se distingue también por la apropiación de una regularidad. Harel *et al.* (2006) consideran que es abstracta y que implica una creencia implícita sobre la naturaleza de las entidades matemáticas que se describen mediante definiciones formales.

En cuanto a la visión operacional o procedimental, Sfard (1991) menciona que se matiza por acciones y algoritmos, que es dinámica y procedimental o secuencial. Contreras y Backhoff (2004) la refieren al dominio de las fases que implica la secuencia de operaciones involucradas, la utilización de algoritmos y el cómo, cuándo y dónde se usan.

Desde la perspectiva de la teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval (1993; 2000; 2006a; 2006b; 2006c), los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, de manera que para su estudio y tratamiento se requiere contar con sus

representaciones. Las representaciones externas a las que hacemos alusión pueden ser de carácter geométrico, algebraico y numérico del objeto. Como lo señala el mismo Duval (2000), el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial debido a que, a diferencia de campos de conocimiento como la biología, la geología o la física, no existen otras maneras de lograr el acceso a los objetos matemáticos más que al producir algunas representaciones. En este sentido, las representaciones permiten el acceso, el estudio y el tratamiento del objeto matemático.

En la teoría de las representaciones de Duval (2006a), la actividad cognitiva de representación constituye una marca o conjunto de marcas perceptibles e identificables respecto de un objeto matemático; el tratamiento es la transformación de la representación dentro del mismo registro de representación y depende, de alguna manera, de las convenciones o reglas matemáticas de ejecución; y la conversión es la transformación de la representación en otra representación de un registro diferente al original, pero que conserva su esencia. A través de estos procesos de representación, tratamiento y conversión se pueden exteriorizar las representaciones mentales de los individuos, así como motivar la retroalimentación y mejorarla.

PRESENTACIÓN DEL ECCD

El ECCD objeto de esta investigación se aplicó de manera formal en una universidad pública de México a todos los estudiantes que cursaban la asignatura de cálculo diferencial (más de 3 mil 500 alumnos por año distribuidos en los diferentes campus de ingeniería). Los resultados de este examen forman parte de su evaluación ordinaria y proporciona 30 por ciento de la calificación final del curso de cálculo diferencial, mientras que el otro 70 por ciento lo otorga el docente que imparte la asignatura. El ECCD se aplica desde el año 2005, está integrado actualmente por 60 reactivos y cuenta con las siguientes características: es

criterial, toda vez que tiene el propósito de evaluar el aprendizaje al informar qué puede hacer o no el examinado; está alineado con el currículo, ya que se desprende de una actividad para identificar lo esencial de éste y evaluarlo; es de opción múltiple, pues se pide al estudiante elegir la respuesta correcta de entre cuatro que se ofrecen; y es de gran escala, ya que su aplicación corresponde a miles de estudiantes.

En la construcción del ECCD se adoptó el modelo de Nitko (1994) para desarrollar exámenes orientados por el currículo. Dicho modelo fue complementado por la metodología para la construcción de test criterios de Popham (1990) y con aportaciones

metodológicas y operativas de Contreras (1998; 2000). El diseño y construcción del ECCD implicó un proceso compartido por un amplio equipo de profesores de la universidad, quienes recolectaron información y formularon juicios de valor de forma consensuada (Corral, 2009) para la toma de decisiones en la construcción del examen. Lo anterior permitió que la información obtenida fuese válida en cuanto a su contenido. Este tipo de instrumento de medición motiva la objetividad y la estandarización del conocimiento.

El ECCD explora cuatro unidades básicas de conocimiento del curso de cálculo diferencial, los reactivos que componen cada unidad y su competencia específica (Tabla 1).

Tabla 1. Competencia y reactivos del examen de cálculo diferencial

Unidad	Nombre	Competencia	Reactivos
1	Funciones de una variable	Identificar y distinguir los diversos tipos de funciones mediante sus diferentes representaciones, gráfica, numérica y analítica, para su uso en los procesos de derivación	1 - 23
2	Límites y continuidad	Determinar los límites y continuidad de funciones en sus representaciones gráfica, numérica y analítica mediante la utilización de los teoremas y criterios gráficos correspondientes para su aplicación en diferenciación de funciones	24 - 37
3	La derivada	Determinar las derivadas de funciones en sus representaciones gráfica, numérica y analítica mediante la utilización de los teoremas y criterios gráficos correspondientes para su aplicación en problemas de optimización	38 - 51
4	Aplicaciones de la derivada	Aplicar la derivada de una función empleando los criterios de la primera y segunda derivada para resolver problemas de optimización	52 - 60

Fuente: elaboración propia.

Para el diseño de cada uno de los reactivos se elaboró previamente una especificación técnica con base en dos componentes: el punto de vista del contenido de cálculo diferencial y el psicométrico.

Las especificaciones técnicas de los reactivos tienen el propósito principal de proporcionar a los diseñadores el contenido específico que debe ser evaluado y los detalles técnicos necesarios para que ellos puedan generar reactivos efectivos. Sin embargo, otro propósito asociado es comunicar a los usuarios del examen (profesores y estudiantes) qué es lo que

mide cada reactivo, así como la cobertura y alcance de las competencias evaluadas.

La especificación consta de una sección de datos de identificación del contenido a evaluar, una interpretación de su sentido, las características de los estímulos que el reactivo presentará al examinado (instrucciones para responder, base del reactivo, distractores, respuesta correcta, tablas o figuras de apoyo, etc.), así como un reactivo muestra que ilustra la aplicación de dichas normas de diseño del reactivo (Fig. 1).

Figura 1. Ejemplo de reactivo muestra de la especificación 11 del ECCD

Reactivo muestra (11)

Un envase de lata cerrado tiene un volumen de 50 cm³ y tiene la forma de un cilindro circular recto. Determine un modelo matemático que exprese el área de la superficie total (S) del envase como una función del radio de la base (r).

$$\text{a) } S(r) = \frac{100}{r} + 2\pi r^2$$

$$\text{b) } S(r) = -\frac{50}{r} + 2\pi r^2$$

$$\text{c) } S(r) = \frac{100}{r} + \pi r^2$$

$$\text{c) } S(r) = -\frac{50}{r} + \pi r^2$$

Fuente: elaboración propia.

MÉTODO

Los datos empleados en esta investigación corresponden a los resultados del ECCD aplicado durante los ciclos escolares 2018-2 y 2019-1. El examen se aplicó a un total de 3 mil 751 estudiantes de primer semestre de las carreras de ingeniería. La administración del ECCD se realizó en los laboratorios de cómputo de la misma universidad y tuvo una duración máxima de dos horas. Las respuestas fueron registradas y procesadas en la plataforma de datos QuestionMark.

Se realizó un análisis de confiabilidad mediante el coeficiente de Kuder-Richarson (KR-20), el cual permite obtener la confiabilidad de un instrumento a partir de los datos obtenidos en una sola aplicación (Corral, 2009); si el coeficiente es mayor que 0.80 es aceptable (Kehoe, 1995; Contreras y Backhoff, 2004; Muñoz y Mato, 2008; Ding *et al.*, 2006). De manera adicional se calculó el coeficiente delta de Ferguson, que mide el poder de discriminación de una prueba completa; el rango de dicho coeficiente es [0, 1] y es satisfactorio cuando es mayor que 0.90 (Ding *et al.*, 2006).

El índice de dificultad (ID) está relacionado con la proporción de estudiantes que resuelven correctamente un reactivo, y se calcula de acuerdo a Crocker y Algina (1986). Existen parámetros para la aceptación de un reactivo de acuerdo con su nivel de dificultad; el establecido por Contreras y Backhoff (2004) dice que debe ser mayor que 0.05 y menor

que 0.95. Para Engelhardt (2009) el promedio de este índice en la prueba debe ser 0.5 para maximizar la discriminación. De acuerdo con Backhoff *et al.* (2000), el nivel medio de dificultad del instrumento debe oscilar entre 0.5 y 0.6; los valores del índice de dificultad deben distribuirse de la manera siguiente: 5 por ciento de reactivos altamente fáciles ($0.87 < ID < 1$), 20 por ciento medianamente fáciles ($0.74 < ID < 0.86$), 50 por ciento con una dificultad media ($0.53 < ID < 0.73$), 20 por ciento medianamente difíciles ($0.33 < ID < 0.52$) y 5 por ciento altamente difíciles ($ID < 0.32$).

El índice de discriminación (IDC) del reactivo permite diferenciar (discriminar) entre aquellos estudiantes que obtuvieron buenas calificaciones en la prueba y quienes obtuvieron bajo puntaje. Está relacionado con una alta posibilidad de que los estudiantes con un desempeño general sobresaliente en la prueba respondan correctamente el reactivo, situación opuesta para el caso de los estudiantes con un desempeño deficiente; en este análisis se considera el 54 por ciento de la población muestral, toda vez que se incluye 27 por ciento de los estudiantes con alto rendimiento e igual porcentaje de estudiantes con el más bajo rendimiento por cada reactivo que se revisa. Para Contreras y Backhoff (2004) el valor discriminativo del reactivo se considera apropiado si es mayor que 0.2. De acuerdo con Backhoff *et al.* (2000), la escala del IDC es: malo ($IDC < 0.20$); regular ($0.20 < IDC < 0.30$); bueno ($0.30 < IDC < 0.40$); y excelente ($IDC > 0.40$).

También se calculó el coeficiente de correlación del punto biserial (r_{pbis}). Para algunos investigadores (Henrysson, 1971; Molina *et al.* 2015), este coeficiente es un indicador de validez predictiva, ya que se relaciona la respuesta a un reactivo por un estudiante y el resultado que obtuvo de la prueba; este indicador psicométrico se calcula de acuerdo al modelo de Backhoff *et al.* (2000) y la escala de valores de este indicador es: discrimina pobremente ($r_{pbis} < 0.14$), regularmente ($0.15 < r_{pbis} < 0.25$), buen poder discriminativo ($0.26 < r_{pbis} < 0.35$) y excelente nivel de discriminación ($r_{pbis} > 0.35$). Para Ding *et al.* (2006) el r_{pbis} debe ser mayor a 0.2, aunque sólo unos cuantos reactivos de la prueba podrían no cumplir con esta condición.

La base de datos de la plataforma QuestionMark contiene la respuesta a cada reactivo por cada estudiante. Los resultados de los reactivos se valoran como respuesta correcta (1) o incorrecta (0). Estos resultados fueron analizados a través del programa IBM SPSS Statistics y Microsoft® Office Excel. El tratamiento de la información permite obtener los índices de dificultad y discriminación, y el coeficiente de correlación del punto biserial, además de la confiabilidad de la prueba por el método de Kuder Richardson (KR-20) y delta de Ferguson.

Para cumplir con el tercer objetivo expuesto en párrafos anteriores, el reactivo muestra de cada especificación fue clasificado en cuanto a su registro de representación inicial, final (lenguaje natural, numérico, algebraico y gráfico) y la actividad cognitiva (representación, tratamiento o conversión) requerida para la resolución del reactivo, así como también el carácter conceptual o procedimental del reactivo.

Se realizaron análisis de varianza mediante la prueba *post-hoc* de Tukey con la finalidad de encontrar diferencias significativas entre grupos y dentro de los mismos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Esta sección se ha dividido en dos partes: la primera se refiere al análisis de calidad del ECCD, y la segunda alude al análisis de los resultados que obtuvieron los estudiantes en el ECCD.

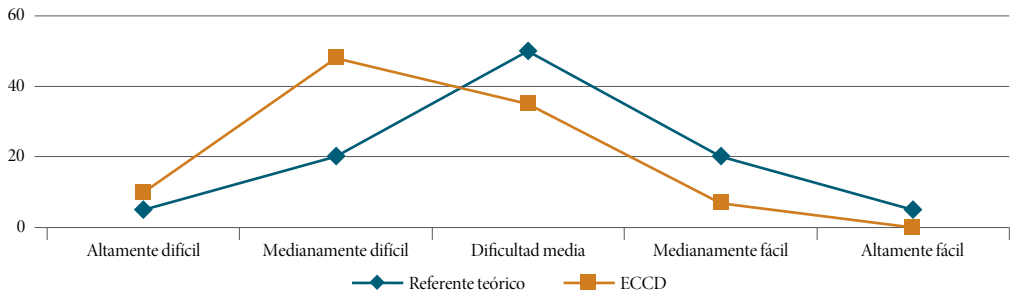
Análisis de la calidad del ECCD

La documentación física existente (contenido y retícula de la materia, justificación de los contenidos, tabla de especificaciones y especificaciones de los reactivos) sobre el diseño y construcción del ECCD evidencia la selección de indicadores adecuados, relacionados con los procesos matemáticos y el contraste de la validez de los reactivos a través del juicio de expertos (Alsina y Coronata, 2014). La validez de contenido se garantizó con la participación de jueces expertos (profesores de cálculo diferencial con experiencia docente mínima de 5 años) y método de consenso grupal (Corral, 2009), en los temas objeto de la validación. Estos jueces analizaron la coherencia de los reactivos con los que se desea evaluar, la complejidad de los reactivos y la habilidad cognitiva a evaluar (Barraza, 2007), así como la suficiencia y pertinencia de los reactivos, considerando los aspectos del constructo que son relevantes, incluidos en las competencias y los indicadores (Cisneros *et al.* 2012).

Participaron en el examen 3 mil 751 estudiantes: 2 mil 098 para el ciclo 2018-2 y 1 mil 653 para el ciclo 2019-1.

La confiabilidad fue calculada mediante KR-20, donde $r = 0.88$ para Contreras y Backhoff (2004) y para Muñoz y Mato (2008) es considerado como apropiado cuando es mayor o igual que 0.85 en el caso de instrumentos estandarizados y de gran escala, mientras que para Ding *et al.* (2006) es satisfactorio cuando se utiliza el método KR-20 y se obtiene una confiabilidad $r > 0.80$, así como para Kehoe (1995) en el caso de exámenes con más de 50 reactivos.

Gráfica 1. Comparativo entre la dificultad del referente teórico y el ECCD



Fuente: elaboración propia.

La distribución de los puntajes totales se calculó mediante la prueba delta de Ferguson y se obtuvo 0.99, lo que satisface ampliamente el criterio establecido (Ding *et al.*, 2006; Engelhardt, 2009).

El promedio del índice de dificultad es de 0.50 ± 0.14 (media $\pm$ desviación estándar), por lo que resulta un nivel medio de dificultad y adecuado (Backhoff *et al.*, 2000; Ding *et al.*, 2006; Engelhardt, 2009). La distribución porcentual resultante del ID está constituido por: reactivos altamente fáciles (0 reactivos, 0 por ciento); medianamente fáciles (4 reactivos, 7 por ciento); dificultad media (21 reactivos,

35 por ciento); medianamente difíciles (29 reactivos, 48 por ciento); y altamente difíciles (6 reactivos, 10 por ciento). Claramente se observa en la Gráfica 1 un desfase a la izquierda respecto de la distribución de la dificultad del referente teórico, lo cual indica que el ECCD es difícil de acreditar; sin embargo, 29 por ciento obtuvo una calificación igual o superior a 60, con la que acreditaron el ECCD.

A continuación (Tabla 2) se describen las características del reactivo más difícil y el más fácil, de acuerdo al ID. Ambos quedan dentro del criterio de dificultad expuesto por Contreras y Backhoff (2004) y la teoría clásica de los test.

Tabla 2. Características de los reactivos

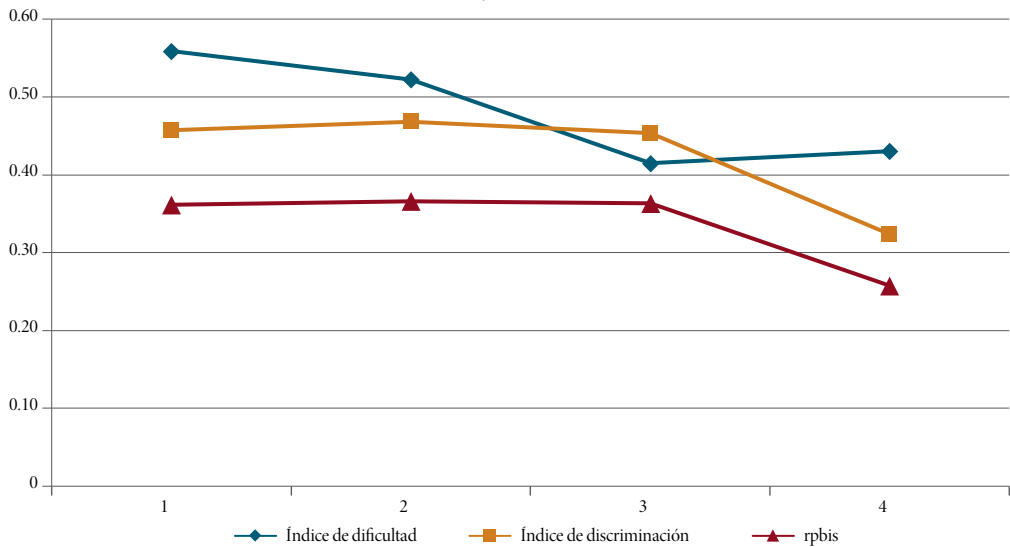
Reactivo	Unidad	Indicador de logro	ID
50	3	Resolver enunciados de problemas de tasas de variación relacionadas que tienen una función implícita como modelo matemático	0.23
7	1	Representar gráficamente una función de variable real	0.81

Fuente: elaboración propia.

El promedio del IDC es 0.44 ± 0.12 (media $\pm$ desviación estándar), el cual cae dentro de una calificación considerada como excelente (Backhoff *et al.*, 2000), y cumple también con el criterio declarado por Ding *et al.* (2006), en el cual el IDC promedio es mayor a 0.3. Se cuenta con que el 72 por ciento (43) de los reactivos tienen discriminación excelente, 15 por ciento (9) buena, 6.5 por ciento (4) regular, mientras que 6.5 por ciento (4) tiene discriminación mala.

Una prueba *post-hoc* de Tukey entre las unidades de reactivos y el IDC mostró diferencias significativas ($p=0.035$), específicamente entre la unidad 4: Aplicaciones de la derivada, y el resto de las unidades que conforman la prueba. Los promedios del IDC para las cuatro unidades consideradas son: 0.46 para la unidad 1 (funciones de una variable); para la unidad 2 (límites y continuidad) es 0.47; la unidad 3 (la derivada) tiene un IDC promedio de 0.45;

Gráfica 2. Gráfica de puntos unidad contra índice de dificultad, discriminación y correlación biserial



Fuente: elaboración propia.

y 0.32 para la unidad 4 (aplicaciones de la derivada). Se identifica el mayor poder de discriminación para los reactivos correspondientes a las unidades 1, 2 y 3 (Gráfica 2); en contraste se determinó que el menor poder de discriminación es para los reactivos de la unidad 4, referidos a las aplicaciones de la derivada. Los reactivos en esta unidad se asocian con un alto grado de dificultad para su resolución.

Se identificaron cuatro reactivos con un IDC menor a 0.20, mismos que se describen en la Tabla 3 y que, de acuerdo con los criterios psicométricos, son reactivos que se sugiere sean revisados en cuanto a una posible discriminación errónea, un error de edición, de redacción o, en su caso, debido a su complejidad

cognitiva, ya que los cuatro reactivos son alta o medianamente difíciles.

El promedio de los coeficientes de correlación biserial de la prueba es 0.35 ± 0.09 (media $\pm$ desviación estándar). El coeficiente cumple con la recomendación de los especialistas (Ding *et al.*, 2006; Engelhardt, 2009) en cuanto a que el promedio del rpbis sea superior a 0.2. Se cuenta con que 55 por ciento (33) de los reactivos tienen discriminación excelente, 31.7 por ciento (19) buena discriminación, 10 por ciento (6) discriminación regular y 3.3 por ciento (2) discrimina pobremente.

Los resultados de las pruebas realizadas exhiben que el ECCD es una prueba confiable y con poder de discriminación satisfactorio.

Tabla 3. Reactivos con IDC menor a 0.20

Reactivo	Unidad	Indicador de logro	IDC	ID
21	1	Representar gráficamente una función trigonométrica inversa a partir de su expresión algebraica	0.13	0.32
50	3	Resolver enunciados de problemas de tasas de variación relacionadas que tienen una función implícita como modelo matemático	0.17	0.23
58	4	Probar las hipótesis del teorema del valor medio para una función en un intervalo	0.18	0.33
59	4	Plantear y resolver problemas de ingeniería que requieran acciones de optimización para su solución	0.15	0.39

Fuente: elaboración propia.

Análisis de los resultados que obtuvieron los estudiantes en el ECCD

El promedio de las respuestas correctas en el ECCD es 29.83 de 60 puntos posibles; el promedio expresado en porcentaje respecto del total de puntos es 50 por ciento, el cual corresponde al ID promedio de 0.50.

La distribución del número de reactivos correctos fue significativamente no normal (Kolmogorov-Smirnov, $D(3751) = 0.071, p < 0.01$; Shapiro-Wilk, $W(3751) = 0.983, p < 0.01$). La asimetría de la distribución del número de reactivos correctos es 0.336 (desviación=0.040). Dichos valores indican una asimetría positiva. La curtosis de la distribución es -0.494 (desviación=0.080). Por el tipo de distribución se adicionan las medidas de tendencia central y de dispersión; la mediana es 29, la moda es 25, el cuartil 1 es 22, el cuartil 2 es 29 y el cuartil 3 es 37. Los estudiantes tuvieron dificultad con 31 reactivos (calificados como alta y medianamente difíciles) y la asimetría positiva evidencia la dificultad del ECCD: sólo 29 por ciento obtuvo una calificación igual o superior a 60 (en la escala de 0 a 100) con la que acreditan el ECCD, es decir, de los 3 mil 751 estudiantes que aplicaron el ECCD, sólo 1 mil 088 lo aprobaron.

Una prueba *post-hoc* de Tukey entre las unidades de reactivos y el ID mostró diferencias significativas, específicamente entre la unidad 1: funciones de una variable (ID=0.56), con las unidades 3: la derivada (ID=0.42) y 4: aplicaciones de la derivada (ID=0.42). En la

unidad 3 se presenta una cantidad importante de teoremas y reglas de derivación que se requieren para obtener la derivada de una función, sobre todo si es compuesta. Para Daza y Garza (2018) el lenguaje simbólico y el alto nivel de abstracción en el tratamiento de la derivada suelen representar una dificultad trascendente para el estudiante de ingeniería. En la unidad 4 se le demanda al estudiante, además de la aplicación de conceptos matemáticos (variación, máximo, mínimo, creciente, decreciente, concavidad e inflexión) intuición, argumentación, así como también la ejecución de secuencias para resolver enunciados de problemas de variación u optimización. En Malaspina (2007) se perciben en los estudiantes deficiencias en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver los problemas de optimización. Para la unidad 2, referida a límites y continuidad, el ID promedio es 0.52; en donde la actividad cognitiva necesaria para la resolución de los reactivos es el tratamiento, en esta unidad se utilizan teoremas y técnicas para el cálculo de los límites como la factorización, racionalización, tabulación y la observación.

Con los resultados obtenidos se observa que las unidades 3 y 4 son prácticamente las más difíciles para los estudiantes. Los reactivos clasificados como altamente difíciles, y algunos calificados como medianamente difíciles son, sin duda, una amenaza para el éxito de los estudiantes en la asignatura (Tabla 4).

Tabla 4. Los 10 reactivos más difíciles en el ECCD

Reactivo	Unidad	Indicador de logro	ID
50	3	Resolver enunciados de problemas de tasas de variación relacionadas que tienen una función implícita como modelo matemático	0.23
51	3	Plantear y resolver enunciados de problemas de tasas de variación relacionadas que tienen una función implícita como modelo matemático	0.24
37	2	Calcular la razón de cambio instantánea en un punto a partir de la gráfica de una función y su recta tangente	0.29
39	3	Representar gráficamente la función derivada a partir de la gráfica de la función	0.30
57	4	Probar las hipótesis del teorema de Rolle para una función	0.32
21	1	Representar gráficamente una función trigonométrica inversa a partir de su expresión algebraica	0.32

Tabla 4. Los 10 reactivos más difíciles en el ECCD

(continuación)

Reactivo	Unidad	Indicador de logro	ID
46	3	Calcular la derivada de una función trigonométrica inversa	0.33
52	4	Determinar los valores absolutos (máximos, mínimos o ambos) de una función en un intervalo	0.33
58	4	Probar las hipótesis del teorema del valor medio para una función en un intervalo	0.33
48	3	Calcular la derivada de una función logarítmica	0.36

Fuente: elaboración propia.

El planteamiento y la resolución de problemas de variación resultan de mayor dificultad para los estudiantes (reactivos 50 y 51). Estos problemas de la vida real deben ser traducidos a una función que les permita obtener la variación en un momento determinado; sin embargo, esta traducción está identificada como una dificultad importante en los estudiantes de cálculo, además de la falta de asociación entre el concepto de la derivada y los problemas de aplicación de variación y optimización (Areaya y Sidelil, 2012). Sánchez *et al.* (2008) identificaron en los estudiantes dificultades y errores sobre los conceptos de velocidad instantánea de un movimiento variado y la tasa de variación instantánea de una función que impiden la resolución de problemas de variación.

Calcular la derivada de una función logarítmica y de una función trigonométrica inversa (reactivos 46 y 48) también son motivo de dificultad para los estudiantes en el ECCD. De manera adicional, aunque no se encuentran dentro de los primeros 10 más difíciles, los reactivos 45 (calcular la derivada de una función trigonométrica mediante la regla de la cadena, ID=0.37) y 47 (calcular la derivada de una función exponencial, ID=0.39) comparten la problemática expuesta, en el sentido de que el estudiante debe identificar la estructura de la función para aplicar adecuadamente la regla de derivación, en ocasiones más de una (producto, cociente y cadena). Lo anterior concuerda con Maharaj y Ntuli (2018), quienes observaron que los estudiantes tienen

serias dificultades para derivar ciertos tipos de funciones algebraicas en las que se requiere aplicar múltiples reglas de derivación en forma simbólica.

La dificultad para representar gráficamente una función trigonométrica inversa a partir de su expresión algebraica (reactivo 21) puede deberse a lo señalado por Buendía y Ordóñez (2009) en el sentido que, en el discurso matemático escolar, la relación entre una función y sus derivadas para las funciones periódicas resulta poco significativa, debido a que se privilegia a los aspectos analíticos asociados y descontextualizados, al igual que los teoremas de Rolle y valor medio (reactivos 57 y 58). Sólo 29 por ciento de los estudiantes logra determinar la pendiente de la recta tangente en un punto (reactivo 37) a partir de su gráfica y la recta tangente trazada en un punto; confusiones comunes son el signo de la recta tangente, la intersección de la recta tangente con el eje horizontal y la ordenada en el origen de la recta tangente (Sánchez *et al.*, 2008).

En el reactivo 52 (ID=0.33) se solicita a los estudiantes determinar los valores absolutos (mínimo, máximo o ambos) en un intervalo dado a partir de una función polinomial de segundo o tercer grado. La dificultad detectada estriba en que los estudiantes asocian directamente el límite inferior del intervalo como la abscisa del mínimo absoluto, y el límite superior del intervalo como el máximo absoluto; no indagan lo que sucede dentro del intervalo y no recurren a la producción de un gráfico para apoyar sus resultados.

El reactivo 39 causa una mayor dificultad a los estudiantes; en él se solicita obtener la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función. Ya que para la resolución de este reactivo no hay una regla de derivación o fórmula directa, se presume, al igual que en el experimento de Borji, Alamolhodaie y Radmehr (2018), que el estudiante no logra asociar o no sabe la relación entre el valor de la recta tangente con el valor de la derivada. En este reactivo se demanda una actividad mental en un ambiente meramente gráfico, en el cual se requiere que se realicen varias asociaciones además de la mencionada; los signos de la recta tangente de la función f con la situación de función creciente o decreciente de f' , puntos críticos de f con los ceros de f' son ejemplo de tales asociaciones. En una investigación reciente Borji, Font, Alamolhodaie y Sánchez (2018) encontraron problemas importantes para que los estudiantes determinaran los puntos críticos y la variación de las rectas tangentes en una representación gráfica. Para algunos

investigadores (Orhun, 2012; Park, 2012) los estudiantes adoptan el concepto de derivada como una operación derivada llevada a cabo mediante teoremas en un ambiente algebraico; esto se debe al método de enseñanza tradicional, en el cual los estudiantes no tienen éxito en hacer conexiones entre la gráfica de la función derivada y la función original. En sus investigaciones, Berry y Nyman (2003) observaron que el estudiante requiere de un esfuerzo cognitivo muy importante para asociar una gráfica de la derivada con la función original; para los estudiosos del cálculo (Baker *et al.*, 2000; Sahin *et al.*, 2015) en general los estudiantes no alcanzan una comprensión conceptual correcta de la representación gráfica de la derivada.

Se calcularon también los promedios del coeficiente de correlación biserial por unidad y se ordenaron, de mayor a menor: límites y continuidad (unidad 2, $r_{pbis}=0.37$), la derivada (unidad 3, $r_{pbis}=0.36$), funciones de una variable (unidad 1, $r_{pbis}=0.36$) y aplicaciones de la derivada (unidad 4, $r_{pbis}=0.26$).

Tabla 5. Reactivos predictores del éxito de los estudiantes en el ECCD

Reactivo	Unidad	Indicador de logro	rpbis	ID	IDC
43	3	Calcular las derivadas de orden superior de una función algebraica	0.509	0.62	0.66
41	3	Calcular la derivada de una función mediante la regla del producto	0.503	0.62	0.64
14	1	Representar gráficamente una función polinomial a partir de su expresión algebraica	0.482	0.64	0.62
3	1	Representar algebraicamente una función de valor absoluto a partir de su gráfica	0.464	0.61	0.61
8	1	Representar algebraicamente una función a partir de una tabla numérica	0.459	0.69	0.58
15	1	Representar gráficamente una función racional a partir de su expresión algebraica	0.459	0.54	0.60
12	1	Representar gráficamente una función lineal a partir de su expresión algebraica	0.449	0.67	0.56
42	3	Calcular la derivada de una función mediante la regla del cociente	0.440	0.42	0.57
28	2	Determinar límites unilaterales a partir una representación gráfica	0.437	0.54	0.59
9	1	Representar algebraicamente una función cúbica a partir de su gráfica	0.433	0.55	0.56

Fuente: elaboración propia.

Una prueba *post-hoc* de Tukey entre las unidades de reactivos y el rpbis mostró diferencias significativas ($p=0.016$), específicamente entre la unidad 4: Aplicaciones de la derivada, y el resto de las unidades que conforman la prueba. En esta unidad hay un descenso importante —aunque no significativo— en los indicadores psicométricos: se tienen los índices más bajos de discriminación y rpbis; sólo un reactivo de esta unidad es de dificultad media y ninguno está calificado como medianamente fácil o altamente fácil. De manera más específica, en la Tabla 5 se exhiben los 10 reactivos con mayor rpbis; se incluyen también el ID e IDC con el objeto de evidenciar que dichos reactivos que son predictores del éxito de un estudiante en el ECCD a su vez son de dificultad media y discriminan de manera excelente de acuerdo a Backhoff *et al.* (2000).

Los estudiantes consiguen buenas notas cuando tienen habilidades para obtener la primera y segunda derivada de funciones algebraicas en reactivos donde se requiere utilizar las reglas de derivación (41, 42 y 43), particularmente la de una constante, potencia, producto y cociente. Se predice también el éxito de los estudiantes cuando representan algebraicamente las funciones a partir de su gráfica, y viceversa; para ello tienen que relacionar semióticamente las características visuales y las unidades simbólicas significativas de los registros gráfico y algebraico de las funciones polinomiales, de valor absoluto y racionales. En estos reactivos (14, 3, 8, 15, 12 y 9) se requiere de la actividad cognitiva de conversión, en la que no hay reglas ni asociaciones básicas (Duval, 2006c).

En cuanto a la actividad cognitiva, 11.66 por ciento (7) de los reactivos son de representación, 35 por ciento (21) pertenecen a la actividad de tratamiento y 53.33 por ciento (32) son reactivos que requieren de la conversión para su resolución. Los promedios del ID son: 0.63 ± 0.14 , 0.46 ± 0.10 y 0.49 ± 0.14 (media $\pm$ desviación estándar) respectivamente. Una prueba *post-hoc* de Tukey entre las actividades

cognitivas y el ID mostró diferencias significativas ($p=0.013$) entre la actividad cognitiva de representación y las actividades de tratamiento y conversión; resultó ser la actividad de representación de menor dificultad (calificada como dificultad media) para los estudiantes en contraste con la actividad de tratamiento y conversión, cuya dificultad se califica como medianamente difícil.

El 15 por ciento (9) de los reactivos cuenta con lenguaje natural como registro inicial; 5 por ciento (3) numérico; 58 por ciento (35) tienen registro inicial algebraico y 22 por ciento (13) registro gráfico. Los promedios del ID para los registros iniciales son: 0.48 ± 0.19 , 0.60 ± 0.12 , 0.49 ± 0.12 y 0.52 ± 0.14 (media $\pm$ desviación estándar) respectivamente. Una prueba *post-hoc* de Tukey entre los registros iniciales de los reactivos y el ID no mostró diferencias significativas. Los reactivos de mayor dificultad tienen como registro inicial el lenguaje natural y el algebraico, mientras que los más fáciles son aquéllos con registro inicial numérico.

El 10 por ciento (6) de los reactivos cuenta con lenguaje natural como registro final; 32 por ciento (19) numérico; 48 por ciento (28) tienen registro final algebraico y 12 por ciento (7) registro gráfico. Los promedios del ID para los registros finales son: 0.58 ± 0.19 , 0.47 ± 0.13 , 0.48 ± 0.11 y 0.56 ± 0.19 (media $\pm$ desviación estándar) respectivamente. Una prueba *post-hoc* de Tukey entre los registros finales de los reactivos y el ID no mostró diferencias significativas. Los reactivos de mayor dificultad tienen como registro final el numérico o el algebraico, mientras que los más fáciles son aquéllos cuyo registro final es el lenguaje natural o el gráfico. En la literatura no se encontraron documentos que identificaran cuál registro inicial o final causa mayor dificultad a los estudiantes cuando resuelven un examen de alto impacto como el que se describe en esta investigación; sin embargo, en sus estudios Borji y Sánchez (2019) encontraron que en el examen de admisión a la universidad que se aplica en España e Irán la mayoría de las preguntas

relacionadas con el cálculo diferencial e integral son de corte algebraico, y un porcentaje muy pequeño están referidas a otros registros y a las relaciones entre ellos.

En el ECCD se cuenta con que 33 por ciento (20) de los reactivos son del tipo conceptual y 67 por ciento (40) son procedimentales. Los promedios del ID son: 0.59 ± 0.13 y 0.45 ± 0.11 (media $\pm$ desviación estándar) respectivamente. Una prueba T de muestras independientes ($p < 0.001$) permite declarar que hay diferencia significativa en los ID promedio para los reactivos de tipo conceptual y procedimental. Los reactivos de corte procedimental son los de mayor dificultad y caen en la categoría de medianamente difíciles, mientras que los conceptuales quedan en la categoría de dificultad media. De los 10 reactivos más difíciles, 80 por ciento son de corte procedimental, mientras que 20 por ciento son conceptuales. Esta distribución con una carga superior a reactivos de corte procedimental presume que el trabajo en el aula conserva una carga similar. Algunos especialistas (Areaya y Sidelil, 2012) identificaron que los conocimientos previos al cálculo por parte de los estudiantes son aparentemente más procedimentales que conceptuales; además, los resultados de sus investigaciones evidencian que el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo en las aulas, así como la propia evaluación es predominantemente procesal. Habre y Abboud (2006) encontraron que los estudiantes de cálculo diferencial privilegian el enfoque procedimental simbólico, ya que se les dificulta interpretar las gráficas de las funciones y sus derivadas; para Abbey (2008) el desequilibrio entre el conocimiento operacional y el conceptual es un factor trascendente que contribuye a la debilidad del estudiante para graficar funciones y obtener información sobre la derivada.

La composición del ECCD en cuanto a los registros inicial y final utilizados en los reactivos es reflejo, de alguna manera, del tipo de enseñanza en el aula por parte de los profesores y diseñadores del ECCD; se presume

que existe un desequilibrio en el manejo de los registros de representación y una carga predominante con el registro algebraico. Para De la Barrera (2010) no es útil privilegiar el registro simbólico que se le da al estudio de la variación como introducción de la noción de derivada; en este mismo sentido, los esquemas algebraicos de los estudiantes son muy dominantes porque les han reportado resultados exitosos en sus estudios de matemáticas previos (Berry y Nyman, 2003; Abbey, 2008). Para Borji y Sánchez (2019), en los exámenes de alto impacto —como los de admisión a las universidades— no se debería obligar a los estudiantes a concentrarse en exceso en las representaciones algebraicas de conceptos.

CONCLUSIONES

Se revisó la calidad del ECCD que se aplica a gran escala en una universidad pública de México y cuyas características principales son: criterial, alineado al currículo, de opción múltiple y de alto impacto; data del año 2005, con una actualización en 2012, y consta de 60 reactivos. Se determinó que el ECCD es válido, confiable y con poder de discriminación satisfactorio. Se calculó la confiabilidad mediante el método KR-20 y se obtuvo un coeficiente $r = 0.88$; también se determinó el coeficiente delta de Ferguson, cuyo valor resultante es 0.99. Ambos son considerados por los especialistas como satisfactorios.

La asimetría de la distribución del número de reactivos correctos evidenció la dificultad del ECCD con un promedio en el $ID = 0.50$, mismo que se encuentra en el límite inferior del rango establecido por Backhoff *et al.* (2000). No se identificó ningún reactivo con ID menor a 0.2 ni mayor a 0.85, sin embargo, se detectaron tres reactivos (21, 50 y 58) altamente difíciles y un reactivo (59) medianamente difícil con discriminación deficiente, mismos que se sugiere sean revisados a profundidad, toda vez que reducen la probabilidad que tienen de responder correctamente aquellos estudiantes

con un desempeño general sobresaliente en la prueba. Las unidades 1, 2 y 3 contienen reactivos que en promedio discriminan de manera excelente.

El análisis de calidad de la prueba permitió establecer que los reactivos predictores del éxito de un estudiante en el ECCD están asociados a la dificultad media y a una discriminación excelente. Se encontró que el éxito de los estudiantes en el ECCD se debe al desempeño favorable que tuvieron al utilizar las reglas de derivación, particularmente la de una constante, potencia, producto y cociente, así como también cuando representan algebraicamente las funciones (polinomiales, de valor absoluto y racionales) a partir de su gráfica y viceversa.

Los resultados de la prueba muestran que las unidades 3 (la derivada) y 4 (aplicaciones de la derivada), que abarcan 38 por ciento del ECCD, son las de mayor dificultad para los estudiantes. Los reactivos de estas unidades se caracterizan por la necesidad de ejecutar varias secuencias de operaciones algebraicas para su resolución: el uso de más de un teorema o regla de derivación, abundante abstracción, la transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico, el uso de la intuición y la exploración e indagación. De manera particular, exhibimos los 10 reactivos con mayor dificultad cuyas demandas cognitivas son: plantear y resolver enunciados de problemas de tasas de variación, calcular la razón de cambio instantáneo en un punto a partir de su gráfica, probar las hipótesis de los teoremas de Rolle y valor medio, calcular máximos y mínimos, representar gráficamente la función derivada a partir de su gráfica, representar gráficamente una función trigonométrica inversa a partir de su expresión algebraica, calcular la derivada de una función logaritmo y de una función trigonométrica inversa. En estas unidades y en estos reactivos se demandan conceptos previos sobre funciones y límites, abunda el lenguaje simbólico y se tiene alto grado de abstracción; las actividades

cognitivas predominantes son el tratamiento en un contexto algebraico y la conversión, mismas que cuentan con la mayor dificultad para los estudiantes, en contraste con la actividad cognitiva de representación.

Desde la perspectiva de las representaciones semióticas, estos 10 reactivos cuyas demandas cognitivas se describen, dan cuenta de su dificultad de resolución a partir de la necesidad, de parte del estudiante, de manipular efectivamente el lenguaje algebraico y transitar de un registro de representación a otro. Aunque el dominio total o parcial de la manipulación algebraica les ha permitido avanzar en los niveles educativos previos a la licenciatura, aquí también se evidencia que esto no es suficiente cuando se trata de resolver ciertos problemas asociados a la derivada que son conceptuales o procedimentales y que implican la ejecución de múltiples secuencias ordenadas o contienen un alto nivel de abstracción.

La dificultad para los estudiantes de acreditar el ECCD (29 por ciento obtuvo una calificación igual o superior a 60, con la que se aprueba) puede explicarse a partir del predominio de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión (88 por ciento de los reactivos), en la resolución de los reactivos que son procedimentales y requieren, en algunos casos, simplificaciones algebraicas importantes para determinar el resultado.

El ECCD muestra, a través de los registros de representación inicial y final, un abundante lenguaje algebraico que para los estudiantes es una de las causas del bajo rendimiento. A partir de los resultados obtenidos se hacen las siguientes recomendaciones:

- Modificar el ECCD con una estructura equilibrada entre los registros de representación, las actividades cognitivas y las perspectivas estructural y procedimental.
- Revisar las concepciones de los profesores en cuanto a su preferencia por

los procedimientos algebraicos para abordar los conceptos de cálculo diferencial y la manera en que piensan que sus alumnos aprenden.

- Liberar a los estudiantes del predominio del aprendizaje de manera operacional con una orientación más conceptual en la enseñanza del cálculo.
- Incluir en el diseño instruccional el análisis e interpretación de la información gráfica, así como la vinculación de las representaciones y la verbalización de las mismas.
- Promover en el curso de cálculo diferencial el equilibrio en el uso de los distintos registros de representación, de manera que se fortalezcan las actividades cognitivas de tratamiento y conversión.
- Enfatizar en la representación gráfica de la derivada e incluir la exploración y demostración para reforzar la perspectiva conceptual con aplicaciones reales.
- Motivar la incorporación de aplicaciones reales en el diseño instruccional para mejorar la transformación del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa.

- Promover en los estudiantes las habilidades de indagación, experimentación, exploración, demostración y argumentación que favorecen el enriquecimiento de la apropiación conceptual, sobre todo en el campo del cálculo diferencial.
- Promover el uso de aplicaciones o programas de cómputo con el fin de observar o visualizar conceptos en sus distintos registros de representación semiótica.

Los resultados de esta investigación aportan a investigadores y docentes elementos para la creación o modificación de materiales didácticos que ayuden a mejorar el entendimiento de los estudiantes en los temas de mayor dificultad.

Como trabajo futuro se pretende analizar la enseñanza del cálculo diferencial directamente en las aulas, particularmente en lo que se refiere a problemas de tasas de variación relacionadas y problemas de optimización, ya que representan una dificultad importante al estudiante. Por otra parte, analizar las técnicas y herramientas docentes al utilizar las diferentes representaciones semióticas para abordar los conceptos del cálculo diferencial.

REFERENCIAS

- ABBEY, Karen Diane (2008), *Students' Understanding of Deriving Properties of a Function's Graph from the Sign Chart of the First Derivative*, Tesis de Doctorado, Maine, University of Maine.
- ACOSTA Treviño, Gloria Maritza, Luis Alfonso Rivera y María Luisa Acosta Treviño (2009), *Desarrollo del pensamiento lógico matemático*, Bogotá, Fundación para la Educación Superior San Mateo.
- ALSINA Ángel y Claudia Coronata (2014), "Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación", *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, vol. 3, núm. 2, pp. 23-36.
- AREAYA, Solomon y Ashebbir Sidelil (2012), "Students' Difficulties and Misconceptions in Learning Concepts of Limit, Continuity and Derivative", *The Ethiopian Journal of Education*, vol. 32, núm. 2, pp. 1-38.
- ARRAIZ Martínez, Guillermo Antonio y Maryerlin Teresa Valecillos Ferriere (2010), "Regreso a las bases de la matemática: un imperativo en educación superior", *Revista Digital Universitaria*, vol. 11, núm. 9, pp. 1-14.
- ARTIGUE, Michele (2018), "Epistemología y didáctica", *El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, vol. 11, julio-diciembre, pp. 1-31.

- BACKHOFF Escudero, Eduardo, Norma Larrazolo Reyna y Martín Rosas Morales (2000), "Nivel de dificultad y poder de discriminación del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA)", *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, vol. 2, núm. 1, pp. 11-27.
- BAKER, Bernadette, Laurel Cooley y María Trigueros (2000), "A Calculus Graphing Schema", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, núm. 5, pp. 557-576. DOI: <https://doi.org/10.2307/749887>
- BARRAZA Macías, Arturo (2007), "La consulta a expertos como estrategia para la recolección de evidencias de validez basadas en contenido", *Investigación Educativa Duranguense*, núm. 7, pp. 5-14.
- BERRY, John S. y Melvin A. Nyman (2003), "Promoting Students' Graphical Understanding of the Calculus", *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 22, núm. 4, pp. 479-495. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.006>
- BORJI, Vahid y Alicia Sánchez (2019), "An Exploratory Analysis of the Representations of Functions in the University Entrance Exam in Spain and Iran", *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, vol. 15, núm. 8. DOI: <https://doi.org/10.29333/ejmste/106258>
- BORJI, Vahid, Hassan Alamolhodaei y Farzad Radmehr (2018), "Application of the APOS-ACE Theory to Improve Students' Graphical Understanding of Derivative", *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, vol. 14, núm. 7, pp. 2947-2967. DOI: <https://doi.org/10.29333/ejmste/91451>
- BORJI, Vahid, Vinceç Font, Hassan Alamolhodaei y Alicia Sánchez (2018), "Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative", *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, vol. 14, núm. 6, pp. 2301-2315. DOI: <https://doi.org/10.29333/ejmste/89514>
- BRITO Vallina, María Lucía, Isidro Alemán Romero, Elena Fraga Guerra, José Luis Para García y Ruth Irene Arias de Tapia (2011), "Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría Ciudad de La Habana, Cuba", *Ingeniería Mecánica*, vol. 14, núm. 2, pp. 129-139.
- BUENDÍA, Gabriela y Alejandra Ordóñez (2009), "El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 12, núm. 1, pp. 7-28.
- CANTORAL Uriza, Ricardo y Rosa María Farfán Márquez (2004), *Desarrollo conceptual del cálculo*, México, Internacional Thomson Editores.
- CANTORAL Uriza, Ricardo, Rosa María Farfán, Francisco Cordero, Juan Antonio Alanís, Rosa Amelia Rodríguez y Adolfo Garza (2005), *Desarrollo del pensamiento matemático*, México, Trillas/ITESM-Universidad virtual.
- CARMINES, Edward G. y Richard A. Zeller (1987), *Reliability and Validity Assessment*, Iowa, Sage.
- CISNEROS Cohernour, Edith J., María Cecilia Jorquera Jaramillo y Ángel Martín Aguilar Riverol (2012), "Validación de instrumentos de evaluación docente en el contexto de una universidad española", *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, vol. 3, núm. 1, pp. 41-55. DOI: <https://doi.org/10.18175/vys3.1.2012.03>
- CONTRERAS Niño, Luis Ángel (1998), "Metodología para desarrollar y validar un examen de español, de referencia criterial y referencia normativa orientada por el currículum, para la educación primaria en México", *Memorias del III Foro Nacional de Evaluación Educativa*, 28 al 30 de octubre, Veracruz, Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior.
- CONTRERAS Niño, Luis Ángel (2000), *Desarrollo y pilotaje de un examen de español para la educación primaria en Baja California*, Tesis de Maestría, Ensenada, Universidad Autónoma de Baja California.
- CONTRERAS Niño, Luis Ángel y Eduardo Backhoff Escudero (2004), "Metodología para elaborar exámenes criterios alineados al currículo", en Sandra Castañeda Figueiras (ed.), *Educación, aprendizaje y cognición, teoría en la práctica*, México, Manual Moderno, pp. 298-323.
- CORRAL, Yadira (2009), "Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos", *Revista Ciencias de la Educación*, vol. 19, núm. 33, pp. 228-247.
- CORREA Zeballos, Adriana, Berta Chahar, María Esther Nieva, Gregorio Figueroa, Ricardo Gallo y Lisa Holgado (2009), "Evaluando el rendimiento académico", *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, núm. 22, pp. 317-326.
- CROCKER, Linda y James Algina (1986), *Introduction to Classical and Modern Test Theory*, Holt, Rinehart & Winston.
- DAZA, Gustavo y Beatriz Garza (2018), "Actitudes hacia el cálculo diferencial e integral: caracterización de estudiantes mexicanos del nivel medio superior", *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol. 32, núm. 60, pp. 279-302. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a14>
- DE LA BARRERA, Arnaldo (2010), *Análisis de algunas tareas en torno a la noción de tasa media de variación y tasa instantánea de variación*, 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Bogotá, Asociación Colombiana de Matemática Educativa, 17 al 9 de octubre de 2010.

- DING, Lin, Ruth Chabay, Bruce Sherwood y Robert J. Beichner (2006), "Evaluating an Electricity and Magnetism Assessment Tool: Brief electricity and magnetism assessment", *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, vol. 2, núm. 1. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.2.010105>
- DUARTE, Olga Lucía y Fabiola Castro (2015), "La enseñanza problemática como estrategia didáctica para el aprendizaje de conceptos de cálculo diferencial", *RECME. Revista Colombiana de Matemática Educativa*, vol. 1, núm. 1, pp. 172-177.
- DUVAL, Raymond (1993), *Registros de representaciones semióticas y funcionamiento cognoscitivo del pensamiento*, México, IPN-CINVESTAV-Departamento de Matemática Educativa.
- DUVAL, Raymond (2000), *Representación, visión y visualización: funciones cognitivas en el pensamiento matemático*, Boulogne/Lille, Université du Littoral Côte-d'Opale/Centre IUFM Nord Pas-de Calais.
- DUVAL, Raymond (2006a), "A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics", *Journal of Educational Studies in Mathematics*, vol. 61, núm. 1-2, pp. 103-131.
- DUVAL, Raymond (2006b), "Quelle Sémiotique Pour L'Analyse de L'Activité et des productions mathématiques", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial, pp. 45-81.
- DUVAL, Raymond (2006c), "Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar de registro de representación", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 9, núm. 1, pp. 143-168.
- ENGELHARDT, Paula V. (2009), "An Introduction to Classical Test Theory as Applied to Conceptual Multiple-Choice Tests", en Charles Henderson y Kathleen A. Harper (eds.), *Getting Started in PER*, vol. 2, núm. 1, pp. 1-40.
- FONSECA Castro, Jennifer Liseth y Cristian Roberto Alfaro Carvajal (2018), "El cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica", *Revista de Educación*, vol. 42, núm. 2, pp. 1-15.
- GARCÍA, Luis, Carmen Azcárate y Mar Moreno (2006), "Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 9, núm. 1, pp. 85-116. DOI: <https://doi.org/10.15517/revedu.v4i2.25844>
- GUTIÉRREZ Mendoza, Lucía (2019), "Enseñanza de la derivada y el límite apoyada con TIC", *Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemática y Tecnología*, vol. 5, núm. 2, pp. 57-62.
- HABRE, Samer y May Abboud (2006), "Student's Conceptual Understanding of a Function and its Derivative in an Experimental Calculus Course", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 25, núm. 1, pp. 57-72. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.004>
- HÄHKIÖNIEMI, Markus (2006), *The Role of Representations in Learning the Derivative*, Jyväskylä (Finlandia), University of Jyväskylä.
- HAREL, Guershon, Annie Selden y John Selden (2006), "Advanced Mathematical Thinking", en Ángel Gutiérrez Rodríguez y Paolo Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future*, Rotterdam, Sense Publishers, pp. 147-172.
- HENRYSSON, Sten (1971), *Gathering, Analysing, and Using Data on Test Items*, en Robert Ladd Thorndike (ed.), *Educational Measurement*, Washington, DC, American Council on Education.
- IGLESIAS Domecq, Nilda (2019), "La interdisciplinariedad en la enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral. Un instrumento didáctico para su concreción", *Revista Magazine de las Ciencias*, vol. 4, núm. 1, pp. 115-130. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3239427>
- JIMÉNEZ Villanueva, Martha Patricia, Gelacio Castillo Cabrera y María del Rosario Rocha Bernabé (2018), "Estrategias de enseñanza de conceptos de cálculo", *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, vol. 5, núm. 10, pp. 1-17.
- KEHOE, Jerard (1995), "Basic Item Analysis for Multiple-Choice Tests. Practical Assessment", *Research & Evaluation*, vol. 4, núm. 10, pp. 1-3.
- MAHARAJ, Aneshkumar y Mthobisi Ntuli (2018), "Students' Ability to Correctly Apply Differentiation Rules to Structurally Different Functions", *South African Journal of Science*, vol. 114, núm. 11-12, pp. 1-7. DOI: <https://doi.org/10.17159/sajs.2018/5008>
- MALASPINA, Uldarico (2007), "Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 10, núm. 3, pp. 365-399.
- MARTÍNEZ-Reyes, Magally (2019), "Propuesta de una metodología para el diseño de intervenciones didácticas usando tecnología en cursos de cálculo para nivel superior", *Revista de Experiencias Didácticas e Investigación en Formación Matemática (REDIEM)*, vol. 1, núm. 1, pp. 9-12.
- MATEUS Nieves, Enrique (2011), "Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial", *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, vol. 2, número especial, pp. 3-21.
- MEDINA Franco, Heriberto Bakke, Christian Ronald Armendariz Zambrano y Vilka Virginia Choez Ramírez (2017), "El cálculo diferencial: aplicación en la microeconomía bancaria", *OLIMPIA. Revista de la Facultad de*

- Cultura Física de la Universidad de Granma*, vol. 14, núm. 46, pp. 55-69.
- MOLINA, Ana Isabel, Ángel Luis Wizner, Carmen Lacave y Jesús Gallardo (2015), *Una herramienta de diseño y análisis de instrumentos de evaluación e indagación docente*, A: JENUI 2015. Actas de las XXI Jornadas de la Enseñanza Universitaria de la Informática, Universitat Oberta La Salle, Andorra la Vella, 8 al 10 de julio, pp. 144-151.
- MONTALTO, Rosa, Liliana Casetti y Marta Welti (2002), "Matemática básica para ingresar a la universidad", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 15, pp. 121-126.
- MORENO Guzmán, Salvador y Carlos Armando Cuevas Vallejo (2004), "Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial", *Educación Matemática*, vol. 16, núm. 2, pp. 93-104.
- MUÑOZ Diosdado, Alejandro y Araceli Arce Viveros (2001), "La maduración para el aprendizaje de la matemática", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 14, pp. 440-445.
- MUÑOZ Cantero, Jesús Miguel y María Dorinda Mato Vázquez (2008), "Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en alumnos de ESO", *Revista de Investigación Educativa*, vol. 26, núm. 1, pp. 209-226.
- NITKO, Anthony J. (1994), *A Model for Developing Curriculum-Driven Criterion-Referenced and Norm-Referenced National Examinations for Certification and Selection of Students*, Conferencia Internacional sobre Evaluación y Medición Educativas, Pretoria, Asociación para el Estudio de la Evaluación Educativa en Sudáfrica (ASSESA), julio de 1994.
- ORHUN, Nevin (2012), "Graphical Understanding in Mathematics Education: Derivative functions and students' difficulties", *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, vol. 55, pp. 679-684. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.551>
- PARK, Jungeun (2012), "Students' Understanding of the Derivative-Literature Review of English and Korean Publications", *Journal of the Korean School Mathematics Society*, vol. 15, núm. 2, pp. 331-348.
- PÉREZ Ruíz, Mario y Adelina Ocaña Gómez (2013), *Pensamiento matemático*, Bogotá, Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano.
- POPHAM, W. James (1990), *Modern Educational Measurement: A practitioner's perspective*, Boston, Allyn and Bacon.
- POSSO Agudelo, Abel E. (2005), "Sobre el bajo aprovechamiento en el curso de matemáticas I de la UTP", *Scientia et Technica*, vol. 11, núm. 28, pp. 169-174.
- ROSALES-Mata, Eva Berenice y Heidi Cecilia Chavira (2019), "Análisis preliminar de los materiales de apoyo para la enseñanza del cálculo en los sistemas de educación abierta", *Revista Rediem*, vol. 1, núm. 1, pp. 123-125.
- RUIZ Ledesma, Elena Fabiola, Enrique Alfonso Carmona García y Ángel Salvador Montiel (2016), "Importancia del cálculo en el desarrollo académico del ingeniero", *Pistas Educativas*, núm. 120, noviembre de 2016, pp. 402-420.
- SAHIN, Zual, Ayhan Kursat Erbas y Arzu Aydogan Yenmez (2015), "Relational Understanding of the Derivative Concept through Mathematical Modeling: A case study", *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, vol. 11, núm. 1, pp. 177-188. DOI: <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.11494>
- SANABRIA Brenes, Giovanni (2019), "La enseñanza de límites: un primer paso en busca de la formulación de un curso semi-virtual de cálculo", *Revista Rediem*, vol. 1, núm. 1, pp. 60-63.
- SÁNCHEZ Matamoros, Gloria, María Mercedes García Blanco y Salvador Llinares Ciscar (2008), "La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 11, núm. 2, pp. 267-296.
- SFARD, Anna (1991), "On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, núm. 1, pp. 1-36.
- TRIGUEROS, María (2005), "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior", *Educación Matemática*, vol. 17, núm. 1, pp. 5-31.
- VERGEL Ortega, Mawency, Hely Isidro Duarte y José Martín Martínez Lozano (2015), "Desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de cálculo integral su relación con la planificación docente", *Revista Científica*, vol. 3, núm. 23, pp. 17-29. DOI: <https://doi.org/10.14483/udistrital.jour.RC.2015.23.a2>
- VILLALOBOS Oliver, Eloísa Bernardett, María del Carmen Cornejo Serrano, Pedro Alberto Quintana Hernández, José Alfredo Ramos Beltrán y Claudia Artemisa Torres Guerrero (2018), "Análisis de los índices de aprovechamiento en las asignaturas de matemáticas posteriores a cálculo diferencial, cuando se usó el software GeoGebra en su enseñanza", *Revista Global de Negocios*, vol. 6, núm. 7, pp. 67-76.
- ZAVALETA Bautista, Antonio y Crisólogo Dolores Flores (2009), "Evaluación del currículum matemático escolar aprendido", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 22, pp. 141-150.
- ZÚÑIGA, Leopoldo (2007), "El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 10, núm. 1, pp. 145-175.